UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CURSO PREUNIVERSITARIO

SEGUNDO PARCIAL

GESTION II/2020 (MAT – 99)

GRUPO 1

Sábado 12 de diciembre de 2020

PREGUNTA 1

Hallar el producto de todas las raíces de la ecuación:

$$5log_x 4 = 7log_4 x$$

Solución: Expresamos la igualdad en una sola base $5log_x 4 = 7\frac{log_x x}{log_x 4} \rightarrow 5log_x 4 = \frac{7}{log_x 4}$

$$\rightarrow 5(log_x 4)^2 = 7 \rightarrow 5(log_x 4)^2 = 7 \rightarrow log_x 4 = \pm\sqrt{\frac{7}{5}} \rightarrow 4 = x^{\pm\sqrt{\frac{7}{5}}}$$

$$\rightarrow x = 4^{\pm\sqrt{\frac{5}{7}}}$$

Así la ecuación tiene dos soluciones que son: $x_1 = 4^{-\sqrt{\frac{5}{7}}}$ y $x_2 = 4^{\sqrt{\frac{5}{7}}}$

Realizando el producto tenemos:

$$x_1 x_2 = 4^{-\sqrt{\frac{5}{7}}} 4^{\sqrt{\frac{5}{7}}} = 4^0 = 1$$

Respuesta: $x_1 x_2 = 1$

PREGUNTA 2

Hallar los valores de k para que la recta $y = x + k$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$

Solución: Para esto debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x + k & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0 & (2) \end{cases}$$

Sustituimos (1) en (2).

$$x^2 + (x + k)^2 - 10x + 2(x + k) + 18 = 0$$

Ordenando:

$$x^2 + x^2 + 2xk + k^2 - 10x + 2x + 2k + 18 = 0$$

$$2x^2 + (2k - 8)x + k^2 + 2k + 18 = 0$$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, entonces la anterior ecuación cuadrática debe tener solución única, es decir su discriminante debe ser cero. Por tanto:

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \rightarrow \quad (2k - 8)^2 - 4(2)(k^2 + 2k + 18) = 0$$

Resolviendo esta última ecuación tenemos dos soluciones, que son:

$$k = -10$$

$$k = -2$$

PREGUNTA 3

Considere una población de bacterias.
Inicialmente había 177 bacterias, que se duplican cada día.
¿Cuántas bacterias habrá luego de dos semanas?

Solución:

Consideremos la siguiente tabla:

$t\ (días)$	$N\ (Número\ de\ Bacterias)$	
0	177	177×2^0
1	177×2	177×2^1
2	$177 \times 2 \times 2$	177×2^2
3	$177 \times 2 \times 2 \times 2$	177×2^3
4	$177 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	177×2^4

De forma general tenemos que el número de bacterias en función del tiempo es:

$$N(t) = 177 \times 2^t$$

Por tanto la cantidad de bacterias que hay en dos semanas (14 días) es:

$$N(14) = 177 \times 2^{14} = 2899968\ bacterias$$

PREGUNTA 4

Determinar los elementos de la parábola

$$9y^2 + 72x + 6y + 1 = 0$$

<u>Solución</u>: Debemos completar cuadrados, para llevar a la forma $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

De donde:

$$\left(y - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = -4(2)(x-0)$$

Por tanto: $k = -\frac{1}{3}$, $h = 0$ y $p = 2$

Por tanto:

1. El vértice de la parábola es $V\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
2. El foco es $F\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$
3. Ecuación de la directriz $x = 2$
4. Lado recto $LR = 8$

PREGUNTA 5

Hallar el valor de $\boldsymbol{x}$ de

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\log_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{a}}\right)^{\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{b}}$$

<u>Solución</u>:

Expresemos todo en base a, de donde:

$$\log_x a = \frac{\log_a a}{\log_a x} \quad \rightarrow \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

De donde:

$$\left(\frac{1}{\log_x a}\right)^{\log_a x} = b^b$$

$$(\log_a x)^{\log_a x} = b^b$$

Entonces:

$$\log_a x = b$$

Así:

$$\boldsymbol{x = a^b}$$

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CURSO PREUNIVERSITARIO

SEGUNDO PARCIAL

GESTION II/2020 (MAT – 99)

GRUPO 2

Sábado 12 de diciembre de 2020

PREGUNTA 1

Hallar el producto de todas las raíces de la ecuación:

$$5log_x4 - 7log_4x = 0$$

Solución: Expresamos la igualdad en una sola base $5log_x4 = 7\frac{log_xx}{log_x4} \rightarrow 5log_x4 = \frac{7}{log_x4}$

$$\rightarrow 5(log_x4)^2 = 7 \rightarrow 5(log_x4)^2 = 7 \rightarrow log_x4 = \pm\sqrt{\frac{7}{5}} \rightarrow 4 = x^{\pm\sqrt{\frac{7}{5}}}$$

$$\rightarrow x = 4^{\pm\sqrt{\frac{5}{7}}}$$

Así la ecuación tiene dos soluciones que son: $x_1 = 4^{-\sqrt{\frac{5}{7}}}$ y $x_2 = 4^{\sqrt{\frac{5}{7}}}$

Realizando el producto tenemos:

$$x_1x_2 = 4^{-\sqrt{\frac{5}{7}}}4^{\sqrt{\frac{5}{7}}} = 4^0 = 1$$

Respuesta: $x_1x_2 = 1$

PREGUNTA 2

Hallar los valores de k para que la recta $y = x + k$ sea tangente

a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$

Solución: Para esto debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x + k & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0 & (2) \end{cases}$$

Sustituimos (1) en (2).

$$x^2 + (x + k)^2 - 10x + 2(x + k) + 18 = 0$$

Ordenando:

$$x^2 + x^2 + 2xk + k^2 - 10x + 2x + 2k + 18 = 0$$

$$2x^2 + (2k - 8)x + k^2 + 2k + 18 = 0$$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, entonces la anterior ecuación cuadrática debe tener solución única, es decir su discriminante debe ser cero. Por tanto:

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \rightarrow \quad (2k - 8)^2 - 4(2)(k^2 + 2k + 18) = 0$$

Resolviendo esta última ecuación tenemos dos soluciones, que son:

$$k = -10$$

$$k = -2$$

PREGUNTA 3

Sabiendo que: $log_a(log_a b) - log_a(log_a c) = 1$

Calcular el valor de $M = log_a(log_b a) - log_a(log_c a)$

Solución:

Como $log_a(log_a b) - log_a(log_a c) = 1 \quad \rightarrow \quad log_a\left(\frac{log_a b}{log_a c}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad log_c b = a$

Que es equivalente a: $log_b c = a^{-1} \quad (\alpha)$

Por tanto:

$$M = log_a(log_b a) - log_a(log_c a) = log_a\left(\frac{log_b a}{log_c a}\right) = log_a\left(\frac{\frac{1}{log_a b}}{\frac{1}{log_a c}}\right) =$$

$$= log_a\left(\frac{log_a c}{log_a b}\right) = log_a(log_b c)$$

Así tenemos que: $M = log_a(log_b c)$ pero utilizamos (α), así tenemos: $M = log_a(a^{-1}) = -1$

$$M = -1$$

PREGUNTA 4

Determinar los elementos de la parábola

$$x^2 - 12x + 4y + 12 = 0$$

Solución: Debemos completar cuadrados, para llevar a la forma $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

De donde:

$$(x-6)^2 = -4(1)(y-6)$$

Por tanto: $k = 6$, $h = 6$ y $p = 1$

Por tanto:

1. El vértice de la parábola es $V(6,6)$
2. El foco es $F(6,5)$
3. Ecuación de la directriz $y = 7$
4. Lado recto $LR = 4$

PREGUNTA 5

Considere una población de bacterias.
Inicialmente había 415 bacterias, que se triplican cada día.
¿Cuántas bacterias habrá luego de una semana?

Solución:

Consideremos la siguiente tabla:

$t\ (días)$	$N\ (Número\ de\ Bacterias)$	
0	415	415×3^0
1	415×3	415×3^1
2	$415 \times 3 \times 3$	415×3^2
3	$415 \times 3 \times 3 \times 3$	415×3^3
4	$415 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	415×3^4

De forma general tenemos que el número de bacterias en función del tiempo es:

$$N(t) = 415 \times 3^t$$

Por tanto la cantidad de bacterias que hay en una semana (7 días) es:

$$N(7) = 415 \times 3^7 = 907605\ bacterias$$