SEGUNDO PARCIAL

GESTION I/2020 (MAT – 99)

GRUPO 2

Domingo 2 de agosto de 2020

PREGUNTA 1

Resolver la ecuación: $[log_3(3^x-1)][log_3(3^{x+1}-3)]=6$

Solución: Aplicando propiedades de potencia y de logaritmo:

$[log_3(3^x-1)][log_3(3^{x+1}-3)]=6 \quad \rightarrow \quad [log_3(3^x-1)][log_3(3^x3-3)]=6$

$[log_3(3^x-1)][log_3 3(3^x-1)]=6 \quad \rightarrow \quad [log_3(3^x-1)][log_3 3+log_3(3^x-1)]=6$

$[log_3(3^x-1)][1+log_3(3^x-1)]=6$

Ahora aplicamos un cambio de variable, sea $u=log_3(3^x-1)$, entonces:

$[u][1+u]=6 \quad \rightarrow \quad u^2+u=6 \quad \rightarrow \quad u^2+u-6=0 \rightarrow \quad (u+3)(u-2)=0$

$\rightarrow \quad u+3=0 \quad ; \quad u-2=0 \quad \rightarrow \quad u=-3 \quad ; \quad u=2$

Ahora retornamos a la variable: x

$\rightarrow \quad log_3(3^x-1)=u=-3 \qquad ; \qquad log_3(3^x-1)=u=2$

$\rightarrow \quad log_3(3^x-1)=-3 \qquad ; \qquad log_3(3^x-1)=2$

$\rightarrow \quad (3^x-1)=3^{-3} \qquad ; \qquad (3^x-1)=3^2$

$\rightarrow \quad 3^x=3^{-3}+1 \qquad ; \qquad 3^x=3^2+1$

$\rightarrow \quad 3^x=\frac{28}{27} \qquad ; \qquad 3^x=10$

$\rightarrow \quad x=log_3\left(\frac{28}{27}\right) \qquad ; \qquad x=log_3(10)$

PREGUNTA 2

Resolver la siguiente ecuación para x.

$$x^{2\log a} - \left(5^{\log a} + 7^{\log a}\right)x^{\log a} + \left(5^{\log a}\right)\left(7^{\log a}\right) = 0$$

Donde $a > 0$ es una constante.

<u>Solución</u>: Aplicando propiedades de potencia

$$\left(x^{\log a}\right)^2 - \left(5^{\log a} + 7^{\log a}\right)x^{\log a} + \left(5^{\log a}\right)\left(7^{\log a}\right) = 0$$

Ahora aplicamos un cambio de variable, sea $t = x^{\log a}$, entonces:

$$(t)^2 - \left(5^{\log a} + 7^{\log a}\right)t + \left(5^{\log a}\right)\left(7^{\log a}\right) = 0$$

Esta última ecuación es de segundo grado, para resolverla aplicamos la formula general

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5^{\log a} + 7^{\log a} \pm \sqrt{\left(5^{\log a} + 7^{\log a}\right)^2 - 4\left(5^{\log a}\right)\left(7^{\log a}\right)}}{2} =$$

$$t = \frac{5^{\log a} + 7^{\log a} \pm \sqrt{\left(5^{\log a} - 7^{\log a}\right)^2}}{2} = \frac{5^{\log a} + 7^{\log a} \pm \left(5^{\log a} - 7^{\log a}\right)}{2}$$

Realizando los dos casos, uno con signo positivo y el otro con signo negativo, tenemos:

$$t_1 = \frac{5^{\log a} + 7^{\log a} + 5^{\log a} - 7^{\log a}}{2} \quad ; \quad t_2 = \frac{5^{\log a} + 7^{\log a} - 5^{\log a} + 7^{\log a}}{2}$$

$$t_1 = \frac{2\left(5^{\log a}\right)}{2} = 5^{\log a} \quad ; \quad t_2 = \frac{2\left(7^{\log a}\right)}{2} = 7^{\log a}$$

$$x^{\log a} = t_1 = 5^{\log a} \quad ; \quad x^{\log a} = t_2 = 7^{\log a}$$

$$x^{\log a} = 5^{\log a} \quad ; \quad x^{\log a} = 7^{\log a}$$

$$x_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = 7$$

Respuestas: $x_1 = 5$; $x_2 = 7$

PREGUNTA 3

Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x+y-14=0$ y que pasa por la intersección de las circunferencias:

$$x^2+y^2-8x-4y+11=0 \qquad \text{y} \qquad x^2+y^2-4x+4y-8=0$$

<u>Solución</u>: La ecuación de la circunferencia pedida pertenece a la curva:

$$x^2+y^2-8x-4y+11+t(x^2+y^2-4x+4y-8)=0 \qquad (\alpha)\,,\ \text{con}\ t\neq -1$$

La ecuación (α) la tenemos que reordenar y agrupar:

$$(1+t)x^2+(1+t)y^2-4(2+t)x-4(1-t)y=8t-11$$

Dividiendo entre $(1+t)$, tenemos: $x^2+y^2-\frac{4(2+t)}{(1+t)}x-\frac{4(1-t)}{(1+t)}y=\frac{8t-11}{(1+t)}$

Ahora completamos cuadrados:

$$x^2-\frac{4(2+t)}{(1+t)}x+\left(\frac{2(2+t)}{(1+t)}\right)^2+y^2-\frac{4(1-t)}{(1+t)}y+\left(\frac{2(1-t)}{(1+t)}\right)^2=\frac{8t-11}{(1+t)}+\left(\frac{2(2+t)}{(1+t)}\right)^2+\left(\frac{2(1-t)}{(1+t)}\right)^2$$

Realizando operaciones, suma de fracciones, términos semejantes, se tiene:

$$\left(x-\frac{2(2+t)}{(1+t)}\right)^2+\left(y-\frac{2(1-t)}{(1+t)}\right)^2=\frac{16t^2+5t+9}{(t+1)^2} \qquad (\beta)$$

Así el centro $C(h,k)$ de la circunferencia es: $h=\frac{2(2+t)}{(1+t)}$; $k=\frac{2(1-t)}{(1+t)}$, por condición del problema el centro $C(h,k)$ pasa por la recta $2x+y-14=0$, es decir tenemos: $2\left(\frac{2(2+t)}{(1+t)}\right)+\frac{2(1-t)}{(1+t)}-14=0$ resolviendo esta última ecuación tenemos: $t=-\frac{1}{3}$, remplazando este valor en la ecuación (β) y operando tenemos:

$$(x-5)^2+(y-4)^2=\frac{41}{2}$$

Desarrollando tenemos:

$$2x^2+2y^2-20x-16y+41=0$$

PREGUNTA 4

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

$A(-1,1)$; $B(3,5)$ y $C(5,-3)$

Solución: Sea $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (α) la ecuación de la circunferencia buscada, por condición del problema los puntos $A(-1,1)$; $B(3,5)$ y $C(5,-3)$ pasan por la circunferencia, entonces deben de cumplir la ecuación (α), así obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Para $A(-1,1)$ tenemos $(-1-h)^2+(1-k)^2=r^2$

Para $B(3,5)$ tenemos $(3-h)^2+(5-k)^2=r^2$

Para $C(5,-3)$ tenemos $(5-h)^2+(-3-k)^2=r^2$

Resolviendo este sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas, tenemos: $h=\frac{16}{5}$; $k=\frac{4}{5}$; $r^2=\frac{442}{25}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (α), tenemos:

$$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25}$$

Desarrollando tenemos:

Respuesta:

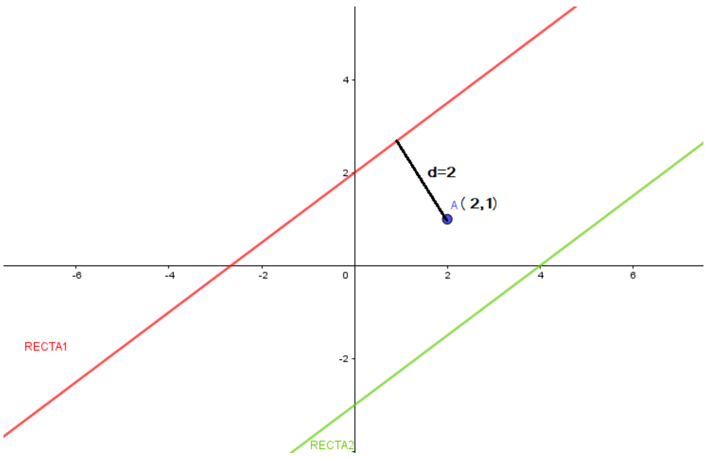
$$25x^2+25y^2-160x-40y-170=0$$

PREGUNTA 5

Hallar la ecuación de la recta que dista del punto $A(2,1)$ tres unidades

y cuya pendiente es igual a $\frac{3}{4}$

Solución: Graficando un bosquejo, tenemos dos soluciones, es decir buscamos dos rectas.



Sea $y = mx + b$ la ecuación de las rectas buscadas, por dato del problema, la pendiente de la recta buscada es $\frac{3}{4}$, es decir $m = \frac{3}{4}$

Por tanto las rectas buscadas tienen la forma $y = \frac{3}{4}x + b$. Por tanto lo que nos falta es hallar el valor de b

Para hallar el valor de b, podríamos encontrar la distancia del punto $A(2,1)$ a la recta $y = \frac{3}{4}x + b$ e igualar a 3 (dato del problema). Por tanto:

Ahora encontramos la distancia del punto $A(2,1)$ a la recta L: $\frac{3}{4}x - y + b = 0 \qquad (\alpha)$

$$d(A,L) = \frac{\left|\frac{3}{4}(2)+(-1)(1)+b\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}} = 3 \rightarrow \frac{\left|\frac{3}{2}-1+b\right|}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}} = 3 \rightarrow \frac{\left|\frac{3}{2}-1+b\right|}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 3 \rightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}+b\right|}{\frac{5}{4}} = 3 \rightarrow \left|\frac{1}{2}+b\right| = \left(\frac{5}{4}\right)3 \rightarrow \left|\frac{1}{2}+b\right| = \frac{15}{4}$$

Resolviendo esta última ecuación, tenemos dos casos: $\frac{1}{2} + b = \frac{15}{4}$ o $\frac{1}{2} + b = -\frac{15}{4}$ esto es: $b = \frac{13}{4}$ o $b = -\frac{17}{4}$

Sustituimos estos valores en la ecuación (α), así tenemos: $\frac{3}{4}x - y + \frac{13}{4} = 0$ o $\frac{3}{4}x - y - \frac{17}{4} = 0$

Ordenando tenemos las soluciones:

Respuesta:

$$3x - 4y + 13 = 0$$

$$3x - 4y - 17 = 0$$