UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Curso Preuniversitario

II/2019

MAT-99	INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA		EXAMEN FINAL
Apellidos		Cédula	
Nombres		Carrera	
Docente		Paralelo	

Fila B: Preguntas de Selección Múltiple (Soluciones)

1. (5 Pts.) El centro de la elipse descrita por la ecuación

$$9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$$

es el punto:

(a) $C(-1, 2)$ (b) $C(1, -2)$ (c) $C(-1, -2)$ (d) $C(2, -1)$ (e) Ninguno

Solución 1. *Reordenando y completamos cuadrados tenemos*

$$\begin{aligned} 0 = 9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 &= 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 4y) - 116 \\ &= 9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) - 116 - 9 - 100 \\ &= 9(x-1)^2 + 25(y+2)^2 - 225, \end{aligned}$$

luego, la ecuación de la elipse queda como

$$25(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 225,$$

de donde, el centro viene dado por $C(1, -2)$. ■

2. (5 Pts.) Los focos de la hipérbola dada por la ecuación

$$16y^2 - 9x^2 + 18x + 32y - 137 = 0$$

son los puntos:

(a) $(1, -6), (1, 4)$ (b) $(1, -5), (1, 3)$ (c) $(-1, -6), (-1, 5)$ (d) $(-2, -3), (-2, 4)$ (e) Ninguno

Solución 2. *Reordenando y completamos cuadrados tenemos*

$$\begin{aligned} 0 = 16y^2 - 9x^2 + 18x + 32y - 137 &= 16(y^2 + 2y) - 9(x^2 - 2x) - 137 \\ &= 16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 - 2x + 1) - 137 - 16 + 9 \\ &= 16(y+1)^2 - 9(x-1)^2 - 144, \end{aligned}$$

de donde, la ecuación de la hipérbola queda como $16(y+1)^2 - 9(x-1)^2 = 144$, *es decir,*

$$\frac{(y+1)^2}{3^2} - \frac{(x-1)^2}{4^2} = 1.$$

De esto tenemos que el centro de la hipérbola es el punto $C(1, -1)$; $a = 4$, $b = 3$ *y por tanto,* $c = 5$, *así, ya que la hipérbola tiene eje vertical, los focos vienen dados por los puntos*

$$(1, -1-5) = (1, -6) \quad y \quad (1, -1+5) = (1, 4). \ ■$$

3. (4 Pts.) Al transformar $\frac{6\pi}{15}$ rad a grados sexagesimales, el resultado es:

(a) $36°$ (b) $48°$ (c) $52°$ (d) $72°$ (e) Ninguno

Solución 3. *De un cálculo directo:*

$$\frac{6\pi}{15}\ rad = \frac{6\pi}{15}\ rad \cdot 1 = \frac{6\pi}{15}\ rad \cdot \frac{180°}{\pi\ rad} = 6 \cdot 12° = 72°. \quad \blacksquare$$

4. (4 Pts.) Si sabemos que $\csc\alpha = 2$, determine el valor de la expresión $\dfrac{\cos\alpha + \cot\alpha}{\sin\alpha}$

(a) $\sqrt{3}/2$ (b) $1-\sqrt{3}$ (c) $3\sqrt{3}$ (d) $1/\sqrt{3}$ (e) Ninguno

Solución 4. *Si suponemos que α es un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo se tiene $\sec\alpha = \frac{hip.}{cat.\ opu.}$, si suponemos que la hipotenusa es igual a 2, el cateto opuesto a α será igual a 1, así, por el teorema de Pitágoras, el cateto adyacente será igual a $\sqrt{3}$. Tenemos entonces que $\cos\alpha = -\sqrt{3}/2$, $\cot\alpha = \sqrt{3}$ y $\sin\alpha = 1/2$, luego*

$$\frac{\cos\alpha + \cot\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$$

En caso general, si α es un ángulo obtuso, necesariamente se encuentra en el segundo cuadrante del plano cartesiano, así, para un círculo de radio 2, $\cos\alpha = -\sqrt{3}/2$, $\cot\alpha = -\sqrt{3}$ y $\sin\alpha = 1/2$, de donde

$$\frac{\cos\alpha + \cot\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -3\sqrt{3},$$

luego, la respuesta es e). $\blacksquare$

5. (5 Pts.) Al simplificar la expresión trigonométrica

$$\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$$

se obtiene

(a) $1-\cos x$ (b) $\sec x$ (c) $\tan x$ (d) $1-\sin x$ (e) Ninguno

Solución 5. *Usando identidades trigonométricas obtenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}} - \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} &= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x + (1-\sin^2 x)} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x - (1-\sin x)\sin x}{(1-\sin x)\cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x} \\
&= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x},
\end{aligned}$$

así, la expresión trigonométrica que se obtiene es $\sec x$. $\blacksquare$

6. (5 Pts.) El valor de la suma de las soluciones, entre $0°$ y $360°$, de la ecuación trigonométrica $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$ es:

(a) $310°$ (b) $260°$ (c) $120°$ (d) $90°$ (e) Ninguno

Solución 6. *Al despejar se obtiene* $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *de donde* $2x = 60°$, *luego,* $x = 30°$ *es una solución de la ecuación. Observe que en un círculo de radio* 2, *la recta horizontal* $y = \sqrt{3}$ *intersecta en dos puntos al círculo, un punto (el que está en el primer cuadrante) corresponde a la solución* $2x = 60°$, *el otro punto (en el segundo cuadrante) corresponde a la segunda solución, entre* $0°$ *y* $360°$, *que se obtiene mediante la operación* $2x = 180° - 60° = 120°$, *luego una segunda solución es* $x = 60°$. *Haciendo rotar las soluciones* $180°$ *en sentido anti-horario encontramos otras dos soluciones dadas por* $30° + 180° = 210°$ *y* $60° + 180° = 240°$. *Así, las suma de las soluciones de la ecuación trigonométrica dada es igual a* $30° + 60° + 210° + 240° = 540°$. ■

7. (5 Pts.) Cuando el ángulo de elevación del sol es de $15°$, un mástil proyecta una sombra de 1 km, ¿cuál es la altura del mástil?

(a) $(2 - \sqrt{3})$ km (b) $2\sqrt{3}$ km (c) $\sqrt{3}/2$ km (d) $(3 - \sqrt{3})$ km (e) Ninguno

Solución 7. *Esencialmente, debemos resolver un triángulo rectángulo de ángulo* $15°$ *cuyo cateto adyacente mide* 1 km. *Para determinar la altura* h *del mástil, que es el cateto opuesto del triángulo, usamos la función tangente:* $\tan 15° = \frac{h}{1}$, *así,* $h = \tan 15°$. *Ahora, el ejercicio consiste en hallar* $\tan 15°$, *veamos:*

$$\begin{aligned}
\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sin(45° - 30°)}{\cos(45° - 30°)} &= \frac{\sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°}{\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\
&= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 - \sqrt{3},
\end{aligned}$$

por lo tanto, la altura del mástil es $h = \tan 15° = (2 - \sqrt{3})$ km. ■