UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Curso Preuniversitario

II/2019

MAT-99	INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA		EXAMEN FINAL
Apellidos		Cédula	
Nombres		Carrera	
Docente		Paralelo	

Fila A: Preguntas de Selección Múltiple (Soluciones)

1. (5 Pts.) El centro de la elipse descrita por la ecuación

$$25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 331 = 0$$

es el punto:

(a) $C(-1, 2)$ (b) $C(-1, -2)$ (c) $C(1, -2)$ (d) $C(2, -1)$ (e) Ninguno

Solución 1. *Reordenando y completamos cuadrados tenemos*

$$\begin{aligned} 0 = 25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 331 &= 25(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) - 331 \\ &= 25(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) - 331 - 25 - 64 \\ &= 25(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 - 420, \end{aligned}$$

luego, la ecuación de la elipse queda como

$$25(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 = 420,$$

de donde, el centro viene dado por $C(1, -2)$. ■

2. (5 Pts.) Los focos de la hipérbola dada por la ecuación

$$16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 199 = 0$$

son los puntos:

(a) $(-2, -4), (-2, 6)$ (b) $(4, -2), (5, -2)$ (c) $(-2, -3), (-2, 5)$ (d) $(-2, -3), (-2, 4)$ (e) Ninguno

Solución 2. *Reordenando y completamos cuadrados tenemos*

$$\begin{aligned} 0 = 16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 199 &= 16(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 2y) + 199 \\ &= 16(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) + 199 - 64 + 9 \\ &= 16(x + 2)^2 - 9(y - 1)^2 + 144, \end{aligned}$$

de donde, la ecuación de la hipérbola queda como $9(y - 1)^2 - 16(x + 2)^2 = 144$, *es decir,*

$$\frac{(y - 1)^2}{4^2} - \frac{(x + 2)^2}{3^2} = 1.$$

De esto tenemos que el centro de la hipérbola es el punto $C(-2, 1)$; $a = 3$, $b = 4$ *y por tanto,* $c = 5$, *así, ya que la hipérbola tiene eje vertical, los focos vienen dados por los puntos*

$$(-2, 1 - 5) = (-2, -4) \quad y \quad (-2, 1 + 5) = (-2, 6). \ ■$$

3. (4 Pts.) Al transformar $\frac{4\pi}{15}$ rad a grados sexagesimales, el resultado es:

(a) $36°$ (b) $48°$ (c) $52°$ (d) $74°$ (e) Ninguno

Solución 3. *De un cálculo directo:*

$$\frac{4\pi}{15}\ rad = \frac{4\pi}{15}\ rad \cdot 1 = \frac{4\pi}{15}\ rad \cdot \frac{180°}{\pi\ rad} = 4 \cdot 12° = 48°. \quad \blacksquare$$

4. (4 Pts.) Si sabemos que $\sec\alpha = 2$, determine el valor de la expresión $\dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha}$

(a) $\sqrt{3}/2$ (b) $1-\sqrt{3}$ (c) $1/\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$ (e) Ninguno

Solución 4. *Si suponemos que α es un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo se tiene $\sec\alpha = \dfrac{hip.}{cat.\ ady.}$, si suponemos que la hipotenusa es igual a 2, el cateto adyacente a α será igual a 1, así, por el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto será igual a $\sqrt{3}$. Tenemos entonces que $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$ y $\cos\alpha = 1/2$, luego*

$$\frac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$$

En caso general, si α es un ángulo obtuso, necesariamente se encuentra en el cuarto cuadrante del plano cartesiano, así, para un círculo de radio 2, $\sin\alpha = -\sqrt{3}/2$, $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ y $\cos\alpha = 1/2$, de donde

$$\frac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -3\sqrt{3},$$

luego, la respuesta es e). $\blacksquare$

5. (5 Pts.) Al simplificar la expresión trigonométrica

$$\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$$

se obtiene

(a) $\sec x$ (b) $1-\cos x$ (c) $\tan x$ (d) $1-\sin x$ (e) Ninguno

Solución 5. *Usando identidades trigonométricas obtenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}} - \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} &= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x + (1-\sin^2 x)} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x - (1-\sin x)\sin x}{(1-\sin x)\cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x} \\
&= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x},
\end{aligned}$$

así, la expresión trigonométrica que se obtiene es $\sec x$. $\blacksquare$

6. (5 Pts.) El valor de la suma de las soluciones, entre $0°$ y $360°$, de la ecuación trigonométrica $2\cos(2x) - \sqrt{3} = 0$ es:

(a) $330°$ (b) $260°$ (c) $180°$ (d) $145°$ (e) Ninguno

Solución 6. *Al despejar se obtiene* $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *de donde* $2x = 30°$, *luego,* $x = 15°$ *es una solución de la ecuación. Observe que en un círculo de radio* 2, *la recta vertical* $x = \sqrt{3}$ *intersecta en dos puntos al círculo, un punto (el que está en el primer cuadrante) corresponde a la solución* $2x = 30°$, *el otro punto (en el cuarto cuadrante) corresponde a la segunda solución, entre* $0°$ *y* $360°$, *que se obtiene mediante la operación* $2x = 360° - 30° = 330°$, *luego una segunda solución es* $x = 165°$. *Haciendo rotar las soluciones* $180°$ *en sentido anti-horario encontramos otras dos soluciones dadas por* $15° + 180° = 195°$ *y* $165° + 180° = 345°$. *Así, las suma de las soluciones de la ecuación trigonométrica dada es igual a* $15° + 165° + 195° + 345° = 720°$. ■

7. (5 Pts.) Cuando el ángulo de elevación del sol es de $15°$, un mástil proyecta una sombra de 2 km, ¿cuál es la altura del mástil?

(a) $(3 - \sqrt{3})$ km (b) $2\sqrt{3}$ km (c) $\sqrt{3}/2$ km (d) $2(2 - \sqrt{3})$ km (e) Ninguno

Solución 7. *Esencialmente, debemos resolver un triángulo rectángulo de ángulo* $15°$ *cuyo cateto adyacente mide* 2 km. *Para determinar la altura* h *del mástil, que es el cateto opuesto del triángulo, usamos la función tangente:* $\tan 15° = \frac{h}{2}$, *así,* $h = 2\tan 15°$. *Ahora, el ejercicio consiste en hallar* $\tan 15°$, *veamos:*

$$\begin{aligned}
\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sin(45° - 30°)}{\cos(45° - 30°)} &= \frac{\sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°}{\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\
&= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 - \sqrt{3},
\end{aligned}$$

por lo tanto, la altura del mástil es $h = 2\tan 15° = 2(2 - \sqrt{3})$ km. ■