UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CURSO PREUNIVERSITARIO
II/2019

MAT-99	INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA		PRIMER PARCIAL
Apellidos		Cédula	
Nombres		Carrera	
Docente		Paralelo	

Fila B: Ejercicios de Desarrollo (Solucionario)

1. (6 puntos) Si la diferencia de las raíces de la ecuación

$$x^2 + (2k+5)x + k = 0$$

es 3, ¿cuánto vale k?

Solución 1. *Denotando por x_1 y x_2 las raíces de la ecuación de encima, por el dáto tenemos que*

$$x_1 - x_2 = 3. \tag{1}$$

Por otro lado, sabemos que la suma de las raíces satisface la igualdad

$$x_1 + x_2 = \frac{-(2k+5)}{1} = -2k - 5. \tag{2}$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), conseguimos $x_1 = -k-1$, pero ya que x_1 es una raíz de la ecuación cuadrática, tenemos

$$(-k-1)^2 + (2k+5)(-k-1) + k = 0.$$

Reduciendo esta última ecuación se tiene $k^2 + 4k + 4 = 0$ de donde, el único posible valor de k es $k = -2$. ■

2. (7 puntos) Resolver la ecuación logarítmica

$$\log_3\left(3^{2x-1} + 2\right) = x - 1 + \log_3\left(3^{x+1} - 4\right)$$

Solución 2. *Usando propiedades de los logaritmos tenemos:*

$$\begin{aligned}
\log_3\left(3^{2x-1}+2\right) - \log_3\left(3^{x+1}-4\right) = x-1 \quad &\Rightarrow \quad \log_3\left(\frac{3^{2x-1}+2}{3^{x+1}-4}\right) = x-1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{3^{2x-1}+2}{3^{x+1}-4} = 3^{x-1} \\
&\Rightarrow \quad 3^{2x-1}+2 = \left(3^{x+1}-4\right)3^{x-1} \\
&\Rightarrow \quad 3^{2x-1}+2 = 3^{2x} - (4)3^{x-1},
\end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros de la última igualdad por 3 tenemos la ecuación $3^{2x} + 6 = (3)3^{2x} - (4)3^x$. Escribiendo $u = 3^x$, conseguimos la ecuación cuadrática $u^2 + 6 = 3u^2 - 4u$, cuyas soluciones son $u = 3$ o $u = -1$. Al regresar a la variable original, $3^x = 3$ de donde $x = 1$, es la única solución ya que $3^x = -1$ no tiene soluciones. ■

3. (7 puntos) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1,5)$ y está a una distancia de 5 unidades del punto $(0,-2)$.

Solución 3. *Supongamos que la ecuación de la recta buscada está dada por* $y = mx + b$. *Ya que el punto* $(1,5)$ *está sobre la recta, tenemos la ecuación*

$$5 = m(1) + b. \tag{3}$$

Por otro lado, al escribir la ecuación de la recta en su forma normal, $mx+(-1)y+b = 0$, *calculamos su distancia al punto* $(0,-2)$, *conseguimos*

$$5 = d = \frac{|m(0) + (-1)(-2) + b|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad 5\sqrt{m^2+1} = |b+2|,$$

que al elevar al cuadrado, y después de reducir, se convierte en

$$25m^2 - b^2 - 4b + 21 = 0. \tag{4}$$

De (3) *conseguimos* $b = 5 - m$, *que reemplazamos en* (4)

$$25m^2 - (5-m)^2 - 4(5-m) + 21 = 0,$$

que después de reducir se convierte en $12m^2 + 7m - 12 = 0$, *cuyas soluciones son* $m = -4/3$ *o* $m = 3/4$. *Los valores respectivos de* b *son* $b = 19/3$ *o* $b = 23/4$. *Así, las ecuaciones de las rectas que satisfacen la condición del ejercicio son*

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3} \qquad o \qquad y = \frac{3}{4}x + \frac{23}{4}. \qquad \blacksquare$$

4. (7 puntos) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$$

y que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$.

Solución 4. *Los puntos de intersección de ambas circunferencias se encuentran sobre la curva*

$$(x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11) + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) = 0,$$

donde el valor de k *lo determinaremos usando la condición del ejercicio. Completemos cuadrados y veamos cual es el centro de la circunferencia (en el caso que lo sea) de la curva de encima: reagrupando*

$$(1+k)x^2 - 4(2+k)x + (1+k)y^2 - 4(1-k)y + (11-8k) = 0,$$

dividiendo entre $1+k$ *y trasponiendo el término constante tenemos*

$$x^2 - 4\left(\frac{2+k}{1+k}\right)x + y^2 - 4\left(\frac{1-k}{1+k}\right)y = \left(\frac{8k-11}{1+k}\right).$$

Completamos cuadrados:

$$x^2 - 4\left(\frac{2+k}{1+k}\right)x + \left(\frac{2(2+k)}{1+k}\right)^2 + y^2 - 4\left(\frac{1-k}{1+k}\right)y + \left(\frac{2(1-k)}{1+k}\right)^2 = \left(\frac{8k-11}{1+k}\right) + \left(\frac{2(2+k)}{1+k}\right)^2 + \left(\frac{2(1-k)}{1+k}\right)^2.$$

de donde,

$$\left(x - \frac{2(2+k)}{1+k}\right)^2 + \left(y - \frac{2(1-k)}{1+k}\right)^2 = \frac{16k^2 - 5k + 9}{(1+k)^2}. \tag{5}$$

Así, el centro $C(a,b)$ *de la circunferencia buscada tiene coordenadas* $a = \dfrac{2(2+k)}{1+k}$ *y* $b = \dfrac{2(1-k)}{1+k}$; *ya que este centro se encuentra sobre la recta* $2x + y - 14 = 0$, *se cumple* $2a + b - 14 = 0$, *es decir, tenemos luego*

$$2\left(\frac{2(2+k)}{1+k}\right) + \left(\frac{2(1-k)}{1+k}\right) - 14 = 0,$$

que al resolver nos da $k = -1/3$. *Reemplazando en* (5) *obtenemos la ecuación de la circunferencia*

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 28. \qquad \blacksquare$$

5. (7 puntos) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 7 = 0$.

Solución 5. *Ya que la recta buscada es perpendicular a la recta* $2x + y + 7 = 0$, *esta tiene la forma*

$$-x + 2y + k = 0, \tag{6}$$

para algún valor de k. *Debemos hallar el valor de* k *de modo que la recta dada en* (6) *intersecte en un sólo punto a la parábola* $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$. *De* (6) *tenemos* $x = 2y + k$ *que reemplazamos en la ecuación de la parábola*

$$y^2 - 2(2y + k) + 2y + 3 = 0,$$

que la simplificar se escribe como $(y-1)^2 = 2k - 2$; *esta ecuación tiene una única solución si y sólo si* $2k - 2 = 0$, *es decir,* $k = 1$. *Finalmente, la ecuación de la recta tangente es* $-x + 2y + 1 = 0$. $\blacksquare$