UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CURSO PREUNIVERSITARIO
II/2019

MAT-99	INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA		PRIMER PARCIAL
Apellidos		Cédula	
Nombres		Carrera	
Docente		Paralelo	

Fila A: Ejercicios de Desarrollo (Solucionario)

1. (6 puntos) Si la diferencia de las raíces de la ecuación

$$x^2 - 3kx + 2k + 1 = 0$$

es 4, ¿cuánto vale k?

Solución 1. *Denotando por x_1 y x_2 las raíces de la ecuación de encima, por el dáto tenemos que*

$$x_1 - x_2 = 4. \tag{1}$$

Por otro lado, sabemos que la suma de las raíces satisface la igualdad

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-3k)}{1} = 3k. \tag{2}$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), conseguimos $x_1 = \frac{4+3k}{2}$, pero ya que x_1 es una raíz de la ecuación cuadrática, tenemos

$$\left(\frac{4+3k}{2}\right)^2 - 3k\left(\frac{4+3k}{2}\right) + 2k + 1 = 0.$$

Reduciendo esta última ecuación se tiene $9k^2 - 8k - 20 = 0$, así, los valores de k son $k = 2$ o $k = -10/9$. ■

2. (7 puntos) Resolver la ecuación logarítmica

$$\log_2\left(2^{2x-1} + 2\right) = x - 1 + \log_2\left(2^{x+1} - 3\right)$$

Solución 2. *Usando propiedades de los logaritmos tenemos:*

$$\begin{aligned}
\log_2\left(2^{2x-1} + 2\right) - \log_2\left(2^{x+1} - 3\right) = x - 1 \quad &\Rightarrow \quad \log_2\left(\frac{2^{2x-1}+2}{2^{x+1}-3}\right) = x - 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{2^{2x-1}+2}{2^{x+1}-3} = 2^{x-1} \\
&\Rightarrow \quad 2^{2x-1} + 2 = \left(2^{x+1} - 3\right)2^{x-1} \\
&\Rightarrow \quad 2^{2x-1} + 2 = 2^{2x} - (3)2^{x-1},
\end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros de la última igualdad por 2 tenemos la ecuación $2^{2x} + 4 = (2)2^{2x} - (3)2^x$. Escribiendo $u = 2^x$, conseguimos la ecuación cuadrática $u^2 + 4 = 2u^2 - 3u$, cuyas soluciones son $u = 2$ o $u = -1$. Al regresar a la variable original, $2^x = 4$ de donde $x = 2$, es la única solución ya que $2^x = -1$ no tiene soluciones. ■

3. (7 puntos) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(-5,1)$ y está a una distancia de 5 unidades del punto $(2,0)$.

Solución 3. *Supongamos que la ecuación de la recta buscada está dada por* $y = mx + b$. *Ya que el punto* $(-5,1)$ *está sobre la recta, tenemos la ecuación*

$$1 = m(-5) + b. \tag{3}$$

Por otro lado, al escribir la ecuación de la recta en su forma normal, $mx+(-1)y+b = 0$, *calculamos su distancia al punto* $(2,0)$, *conseguimos*

$$5 = d = \frac{|m(2) + (-1)(0) + b|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad 5\sqrt{m^2+1} = |2m + b|,$$

que al elevar al cuadrado, y después de reducir, se convierte en

$$21m^2 - 4mb + 25 - b^2 = 0. \tag{4}$$

De (3) *conseguimos* $b = 1 + 5m$, *que reemplazamos en* (4)

$$21m^2 - 4m(1 + 5m) + 25 - (1 + 5m)^2 = 0.$$

que después de reducir se convierte en $12m^2 + 7m - 12 = 0$, *cuyas soluciones son* $m = -4/3$ *o* $m = 3/4$. *Los valores respectivos de* b *son* $b = -17/3$ *o* $b = 19/4$. *Así, las ecuaciones de las rectas que satisfacen la condición del ejercicio son*

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3} \qquad o \qquad y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4}. \qquad \blacksquare$$

4. (7 puntos) Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por la intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0.$$

Solución 4. *Los puntos de intersección de ambas circunferencias se encuentran sobre la curva*

$$(x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11) + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) = 0,$$

donde el valor de k *lo determinaremos usando la condición del ejercicio. Completemos cuadrados y veamos cual es el centro de la circunferencia (en el caso que lo sea) de la curva de encima: reagrupando*

$$(1 + k)x^2 - 4(2 + k)x + (1 + k)y^2 - 4(1 - k)y + (11 - 8k) = 0,$$

dividiendo entre $1 + k$ *y trasponiendo el término constante tenemos*

$$x^2 - 4\left(\frac{2+k}{1+k}\right)x + y^2 - 4\left(\frac{1-k}{1+k}\right)y = \left(\frac{8k-11}{1+k}\right).$$

Completamos cuadrados:

$$x^2 - 4\left(\frac{2+k}{1+k}\right)x + \left(\frac{2(2+k)}{1+k}\right)^2 + y^2 - 4\left(\frac{1-k}{1+k}\right)y + \left(\frac{2(1-k)}{1+k}\right)^2 = \left(\frac{8k-11}{1+k}\right) + \left(\frac{2(2+k)}{1+k}\right)^2 + \left(\frac{2(1-k)}{1+k}\right)^2.$$

de donde,

$$\left(x - \frac{2(2+k)}{1+k}\right)^2 + \left(y - \frac{2(1-k)}{1+k}\right)^2 = \frac{16k^2 - 5k + 9}{(1+k)^2}. \tag{5}$$

Así, el centro $C(a,b)$ de la circunferencia buscada tiene coordenadas $a = \dfrac{2(2+k)}{1+k}$ y $b = \dfrac{2(1-k)}{1+k}$; ya que este centro se encuentra sobre la recta $2x+y-14=0$, se cumple $2a+b-14=0$, es decir, tenemos luego

$$2\left(\frac{2(2+k)}{1+k}\right)+\left(\frac{2(1-k)}{1+k}\right)-14=0,$$

que al resolver nos da $k=-1/3$. Reemplazando en (5) obtenemos la ecuación de la circunferencia

$$(x-5)^2+(y-4)^2=28. \qquad \blacksquare$$

5. (7 puntos) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2+4x+12y-8=0$ que es paralela a la recta $3x+9y-11=0$.

Solución 5. *Ya que la recta buscada es paralela a la recta $3x+9y-11=0$, esta tiene la forma*

$$3x+9y+k=0, \tag{6}$$

para algún valor de k. Debemos hallar el valor de k de modo que la recta dada en (6) intersecte en un sólo punto a la parábola $x^2+4x+12y-8=0$. De (6) tenemos $3y=-x-\frac{k}{3}$ que reemplazamos en la ecuación de la parábola

$$x^2+4x+4\left(-x-\frac{k}{3}\right)-8=0,$$

que la simplificar se escribe como $x^2-\frac{4k+24}{3}=0$; esta ecuación tiene una única solución si y sólo si $4k+24=0$, es decir, $k=-6$. Finalmente, la ecuación de la recta tangente es $3x+9y-6=0$. $\blacksquare$