Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Curso Preuniversitario

Introducción a la Matemática MAT-99

Prueba de Suficiencia Académica II/2018

Esquema de las soluciones

Nota: N.A. significa que ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

1. Si a, b, c, d, x, y son números positivos. El número

$$\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx}$$

es igual a

(a) $\log\dfrac{y}{x}$ (b) $\log\dfrac{x}{y}$ (c) 1 (d) 0 (e) N.A.

Respuesta (b) $\log\dfrac{x}{y}$**.**

Solución. Sea $M = \log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx}$, entonces

$$\begin{aligned}
M &= \log a - \log b + \log b - \log c + \log c - \log d - (\log\frac{a}{d} + \log\frac{y}{x}) \\
&= \log a - \log d - (\log a - \log d + \log\frac{y}{x}) \\
&= -\log\frac{y}{x} \;=\; \log\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

2. $\sqrt[m]{\dfrac{2^m + 3^m + 4^m}{6^{-m} + 8^{-m} + 12^{-m}}}$ es igual a

(a) 24 (b) 16 (c) 8 (d) 12 (e) 18

Respuesta (a) 24.

Solución. Sea $M \sqrt[m]{\dfrac{2^m + 3^m + 4^m}{6^{-m} + 8^{-m} + 12^{-m}}}$, entonces

$$\begin{aligned}
M &= \sqrt[m]{\frac{2^m + 3^m + 4^m}{\frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{12^m}}} = \sqrt[m]{\frac{2^m + 3^m + 4^m}{\frac{1}{2^m 3^m} + \frac{1}{2^m 4^m} + \frac{1}{2^m 6^m}}} \\
&= \sqrt[m]{\frac{2^m + 3^m + 4^m}{\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m}\right)}} = \sqrt[m]{2^m}\,\sqrt[m]{\frac{2^m + 3^m + 4^m}{\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m}}} \\
&= 2\sqrt[m]{\frac{2^m + 3^m + 4^m}{\frac{4^m + 3^m + 2^m}{12^m}}} \\
&= 2\sqrt[m]{12^m} \;=\; 2 \cdot 12 = 24
\end{aligned}$$

3. Hallar la suma de todos los valores de m para los cuales la ecuación

$$x^2 + 2(m+2)x + 9m = 0$$

tiene raices iguales

(a) 0 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Respuesta (c) 5.

Solución. Para que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tenga dos raíces iguales es necesario y suficientes que su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ sea 0. En la ecuación del problema el discriminante es $[2(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9m = 4(m+2)^2 - 36m = 4m^2 + 16m + 16 - 36m = 4m^2 - 20m + 16$. Debemos resolver la ecuación $4m^2 - 20m + 16 = 0$, simplificando y factorizando es equivalente a $(m-1)(m-4) = 0$, cuyas soluciones son $m = 1$ y $m = 4$. Para cada cada uno de estos valores la ecuación del problema tiene dos raíces iguales, entonces su suma es $1 + 4 = 5$.

4. El polinomio $x^3 - 11x^2 - mx + n$ es divisible entre $x^2 - 9$. Entonces $m + n$ es igual a

(a) 104 (b) 105 (c) 106 (d) 107 (e) 108

Respuesta (e) 108.

Solución. El polinomio de tercer grado es divisible por $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, es decir, es divisible por $x - 3$, entonces por el Teorema del resto

$$3^3 - 11 \cdot 3^2 - m(3) + n = 27 - 99 - 3m + n = 0. \tag{1}$$

También es divisible por $x + 3$, entonce nuevamente por el Teorema del Resto

$$(-3)^3 - 11 \cdot 3^2 - m(-3) + n = -27 - 99 + 3m + n = 0. \tag{2}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos $-2 \cdot 99 + 2n = 0$, de donde $n = 99$. Reemplazando este valor en (1), se tiene $27 - 3m = 0$, de donde $m = 9$. Finalmente, $m + n = 99 + 9 = 108$.

5. La suma de tres números en progresión aritmética es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. El número del medio de los tres números es

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Respuesta (d) 9.

Solución. Si tres números están en progresión aritmética ellos pueden escribirse como $a - d$, a, $a + d$. Por hipótesis

$$a - d + a + a + d = 3a = 27, \tag{3}$$

es decir $3a = 27$, de donde $a = 9$, que es el número del medio. Los tres números se pueden encontrar usando la seegunda condición:

$$(9-d)^2 + 9^2 + (9+d)^2 = 293. \tag{4}$$

Es decir, $81 - 18d + d^2 + 81 + 18d + d^2 = 293$, equivalentemente $2d^2 = 50$, luego $d = 5$ o $d = -5$. Entonces, la progresión aritmética es $4, 9, 13$ o $13, 9, 4$. La primera corresponde a una diferencia positiva y la segunda a una diferencia negativa.