# SOLUCIÓN

**FILA ¨A¨**

**Preguntas de Selección Múltiple**

1. (2.5 %) Construya la tabla de verdad de la proposición $[p \to (q \to r)] \to [(p \wedge \sim q) \vee r]$ y diga si es una:

Solución:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p$ | $\to$ | $(q \to r))$ | $\to$ | $((p$ | $\wedge$ | $\sim q)$ | $\vee$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

así es una contingencia. Asi este resultado corresponde al inciso c)

2. (2.5 %) Hallar los valores de verdad de $p$, $q$ y $r$ para que la proposición $[(p \vee r) \to \sim q] \wedge (q \wedge \sim r)$ sea verdadera

Solución:

$$\underbrace{[(p \vee r) \to \sim q] \wedge (q \wedge \sim r)}_{V}$$

por tanto $\underbrace{[(p \vee r) \to \sim q]}_{V}$ y $\underbrace{(q \wedge \sim r)}_{V}$, así $v(q) = V$ y el $v(r) = F$ pero como $\underbrace{[(p \vee r) \to \sim q]}_{V}$, entonces $v(p \vee r) = F$, así $v(p) = F$. Asi este resultado corresponde al inciso b)

3. (2.5 %) La proposición $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim p] \to \sim [(p \vee F) \to (r \vee V)]$ es lógicamente equivalente a

Solución:

$$\begin{aligned}
\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim p] \to \sim [(p \vee F) \to (r \vee V)] &\equiv \sim [(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \to \sim (p \to V) \\
&\equiv \sim [(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)] \to \sim (\sim p \vee V) \\
&\equiv \sim [V \wedge \sim (p \wedge q)] \to \sim V \\
&\equiv \sim (\sim (p \wedge q)) \to F \\
&\equiv (p \wedge q) \to F \\
&\equiv \sim (p \wedge q) \vee F \\
&\equiv \sim (p \wedge q)
\end{aligned}$$

así la proposición $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim p] \to \sim [(p \vee F) \to (r \vee V)]$ es lógicamente equivalente a $\sim (p \wedge q)$. Asi este resultado corresponde al inciso a)

4. (2.5 %) Un conjunto esta formado por

Solución: Elementos y este resultado corresponde al inciso b)

5. (2.5 %) La relación $a \in A$ puede ser escrita bajo la forma

Solución: $\{a\} \subseteq A$ ya que $a \in \{a\}$, entonces $a \in A$. Asi este resultado corresponde al inciso c)

6. (2.5 %) Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A - B$ es

Solución:

$A - B = A \cap B^c = (A \cap B^c) \cup \emptyset = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A \cap (B^c \cup B) = A \cap U = A$. Asi este resultado corresponde al inciso d)

7. (2.5 %) Si $A = \{x \in \mathbb{N} : \quad x \text{ es divisor de } 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : \quad x^2 < 16\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 3x + 2 = 0\}$, entonces $(A \cap B) \cup C$ es

Solución: Notemos que $A = \{x \in \mathbb{N} : \quad x \text{ es divisor de } 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : \quad x^2 < 16\} = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$ por tanto $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3\} \cup C = \{1, 2, 3\}$. Asi este resultado corresponde al inciso d)

8. (2.5 %) Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ y $C = \{2, 3, 5\}$, los elementos de $X = [(A \cap B)^c \cup (A - C)] \cap (A - B)$ es

Solución:

$X = [(A \cap B)^c \cup (A - C)] \cap (A - B) = [\{1, 4\}^c \cup \{1, 4\}] \cap \{5\} = [\{2, 3, 5, 6\} \cup \{1, 4\}] \cap \{5\} = U \cap \{5\} = \{5\}$. Asi este resultado corresponde al inciso e)

## Preguntas de Desarrollo

9. (6 %) Pruebe que: Si $x^2 + x - 1 = 0$, entonces $x^3 - 2x + 1 = 0$

Solución: Multiplicando la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$ por $(x - 1)$ se tiene que $(x - 1)(x^2 + x - 1) = (x - 1)0$, entonces $x^3 - 2x + 1 = 0$

10. (7 %) Probar por inducción matemática que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Solución: Sea la proposición $P_{(n)} := 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, así

*i)* ¿$P_{(1)}$ es verdad?

$P_{(1)} := 1^2 = \frac{1(2(1)-1)(2(1)+1)}{3}$, entonces $1 = 1$

*ii)* Si $P_{(k)}$ es verdad, entonces $P_{(k+1)}$ tiene que ser verdad

Por hipótesis de inducción $P_{(k)} := 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k - 1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ es verdad, así

$$\begin{aligned} P_{(k+1)} := 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2(k+1) - 1)^2 &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k - 1)^2 + (2(k+1) - 1)^2 \\ &= [1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k - 1)^2] + (2(k+1) - 1)^2 \\ &= \left[\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}\right] + (2(k+1) - 1)^2 \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2(k+1)-1)^2}{3} \\ &= \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3} \quad (1) \end{aligned}$$

por otro lado $\frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3} = \frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$ (2) así de las relaciones (1) y (2) se tiene que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2(k+1) - 1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1) - 1)(2(k+1) + 1)}{3}$$

es decir $P_{(n)}$ es verdad para todo $n \in \mathbb{N}$