SOLUCIÓN

FILA ¨A¨

Preguntas de Desarrollo

1. (8.5 %) Resolver la ecuacion $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c)$

Solucion:

$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c)$

$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}+x(a+b+c)=abc+1$

$x\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+a+b+c\right)=abc+1$

$x\left(\frac{c+a+b+abc(a+b+c)}{abc}\right)=abc+1$

$x\left(\frac{(a+b+c)(1+abc)}{abc}\right)=abc+1$

$x\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=1$

$x=\frac{abc}{a+b+c}$

2. (8.5 %) Sean x_1 y x_2 las dos raices de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$. Si la suma de sus cuadrados es 4 y el producto es $\frac{1}{2}$. Hallar el valor de $E=\frac{b^2+c^2}{a^2}$

Solución: Segun las condiciones

$$x_1^2+x_2^2=4$$

y

$$x_1x_2=\frac{1}{2}$$

remplazando $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, asi de las ecuaciones anteriores

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y elevando al cuadrado $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}$ de donde $(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2}$ o equivalente mente $4 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b^2}{a^2}$ de donde $\frac{b^2}{a^2} = 5$

por otra lado $\frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

3. (8.5 %) Si se cumple que $(1+i)^2 + (1+i)^4 (1+i)^6 (1+i)^8 = x + iy$ determinar el valor de $E = \frac{x+y}{x-y}$

Solución: El numero complejo $1 + i$ en coordenadas polares es:

$1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$, por tanto

$$(1+i)^2 = \left[\sqrt{2}\left(cos\tfrac{\pi}{4} + isen\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^2 = 2\left(cos\tfrac{\pi}{2} + isen\tfrac{\pi}{2}\right) = 2i$$
$$(1+i)^4 = \left[\sqrt{2}\left(cos\tfrac{\pi}{4} + isen\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^4 = 4\left(cos\pi + isen\pi\right) = -4$$
$$(1+i)^6 = \left[\sqrt{2}\left(cos\tfrac{\pi}{4} + isen\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^6 8\left(cos\tfrac{3\pi}{2} + isen\tfrac{3\pi}{2}\right) = -8i$$
$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(cos\tfrac{\pi}{4} + isen\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^8 = 16\left(cos2\pi + isen2\pi\right) = 16$$

de esta forma $(1+i)^2 + (1+i)^4 (1+i)^6 (1+i)^8 = 2i - 4 - 8i + 16 = 12 - 6i$ por tanto $x = 12$ e $y = -6$ finalmente $E = \frac{x+y}{x-y} = \frac{12-6}{12-(-6)} = \frac{1}{3}$

4. (2.5 %) Calcular $z = \frac{4i^{217}+3i^{51}-4i^2-1}{3i^{158}-7i^{100}+i^3}$

Solución: $z = \frac{4i^{217}+3i^{51}-4i^2-1}{3i^{158}-7i^{100}+i^3} = \frac{4i+3i^3-4i^2-1}{3i^2-7i^0+i^3} = \frac{4i-3i+4-1}{-3-7-i} = -\left(\frac{3+i}{10+i}\right) = -\left(\frac{3+i}{10+i}\right)\left(\frac{10-i}{10-i}\right) = -\frac{30-3i+10i-i^2}{10^2+1} = -\frac{31}{101} - \frac{7}{101}i$